89. 共通集合の測度

(阪大)　安西 廣忠

(1948. 2. 27)

完全加法的 measure を m とする $m(\Omega)=1$
Ω の中に無限に多くの集合 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n \cdots$ が与へられてゐて $m(A_n) \geq \alpha$ $n=1,2,\cdots$ $0<\alpha<1$ なるとき任意の自然数 p と実数 $\varepsilon>0$ に対して 上述の集合の中から適当に p 個 $A_{i_1}, A_{i_2} \cdots A_{i_p}$ を選ぶとその共通部分の measure が $\alpha^p-\varepsilon$ より大きくなる

$$m(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}) > \alpha^p - \varepsilon$$

之は角谷さんから提出せられた問題であるが Hölder の不等式を使ふと簡単に証明出来る。

集合 A_k の characteristic function を $\varphi_k(x)$ とする。 $k=1,2\cdots$
Hölder の不等式により

$$\int(\varphi_1(x)+\cdots+\varphi_n(x))^p dx \geq \left\{\int(\varphi_1(x)+\cdots+\varphi_n(x))dx\right\}^p =$$

$$\left(\sum_k \int \varphi_k(x)dx\right)^p = n^p \alpha^p$$

$1 \leq i_1, i_2 \cdots i_p \leq n$ なる p 個の index の system のうち、すべての index が相異なる system の集りを T その残りを T' とする。

$$(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)^p = \sum_{(i_1\cdots i_p)\in T} \varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\cdots\varphi_{i_p} + \sum_{(i_1,\cdots,i_p)\in T'} \varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\cdots\varphi_{i_p}$$

T の個数は $p!\binom{n}{p} = n(n-1)\cdots(n-p+1)$
T' の個数は $n^p - n(n-1)\cdots(n-p+1) < p^2 n^{p-1}$ である。
もしすべての $(i_1, i_2, \cdots i_p) \in T$ に対して
$m(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}) \leq \alpha^p - \varepsilon$ とすれば

$$\int \sum_{(i_1\cdots i_p)\in T} \varphi_{i_1}(x)\varphi_{i_2}(x)\cdots\varphi_{i_p}(x)\,dx \leq n(n-1)\cdots(n-p+1)(\alpha^p-\varepsilon)$$

$$\int \sum_{(i_1\cdots i_p)\in T'}' \varphi_{i_1}(x)\cdots\varphi_{i_p}(x)\,dx = p^2 n^{p-2}$$ であるから

$n(n-1)\cdots(n-p+1)(\alpha^p-\varepsilon)+p^2 n^{p-1} \geq n^p \alpha^p$ でなければならぬ

$$p^2 n^{p-1} > \varepsilon\, n(n-1)\cdots(n-p+1)$$

pに対してnが充分大きいとき之は成立しない。

更に p とεが与へられた所．どれ位大きなnを取れば $n \geqq i_K$, $k=1,2 \cdots p$ が存在して $m(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p}) > \alpha^p - \varepsilon$ となるかといふことも前節の式から明かである．又 $m(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p}) > \alpha^p - \varepsilon$ となる $(i_1, \cdots i_p)$ が表はれる。lower frequency も同様に計算出する。

〔附記〕 名大の伊藤さんにこの問題の話をした所．上記と同様の回答を寄せられた．